線形計画の双対問題の導出とその応用
ー列生成のためのー

小林和博

2010 年 8 月 19 日

1　最大化の線形計画問題

最大化の線形計画問題を以下のように書く.

$$
\begin{array}{lll}
\max & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j & \\
\text{s.t.} & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & (i \in I) \\
& \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i \in E) \\
& x_j \ge 0 & (j \in R)
\end{array}
\tag{1}
$$

制約式の線形結合をとると、

$$
\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{2}
$$

ここで、$y_1, y_2, \ldots, y_m$ は、$y_i \ge 0 \quad y_i \in I$ を満たす数とする。ここで、$y_1, y_2, \ldots, y_m$ を、

$$
\begin{array}{ll}
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j & j \in R \\
\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j & j \in F.
\end{array}
\tag{3}
$$

を満たすようにとれば、最初の問題の任意の実行可能解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して、

$$
c_j x_j \le \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j
$$

がなりたつ。したがってまた、

$$
\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \tag{4}
$$

がなりたつ. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が、6, 8 の両方を満たすならば、

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i.$$

2 最小化の場合

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad && (i \in I) \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad && (i \in E) \\
& x_j \geq 0 && (j \in R)
\end{aligned} \tag{5}$$

制約式の線形結合をとると、

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \geq \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \tag{6}$$

ここで、$y_1, y_2, \ldots, y_m$ は、$y_i \geq 0 \;\; i \in I$ を満たす数とする。ここで、$y_1, y_2, \ldots, y_m$ を、

$$\begin{aligned}
c_j &\geq \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad j \in R \\
c_j &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \quad j \in F.
\end{aligned} \tag{7}$$

を満たすようにとれば、最初の問題の任意の実行可能解 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ に対して、

$$c_j x_j \geq \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j$$

がなりたつ。したがってまた、

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \right) x_j \tag{8}$$

がなりたつ. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ が、6, 8 の両方を満たすならば、

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq \sum_{j=1}^{m} b_i y_i.$$

3　Vehicle Routing の場合

$$
\begin{array}{lll}
\min & \displaystyle\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} c_p^k y_p^k & \\
\text{subject to} & \displaystyle\sum_{p \in P^k} \left(-y_p^k\right) \geq -1 & k \in K \\
& \displaystyle\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} a_{ip}^k y_p^k = 1 & i \in C \\
& y_p^k \geq 0 & \forall k \in K,\ \forall p \in P_k
\end{array}
\tag{9}
$$

最初の制約式に対する双対変数を $z_k \geq 0$, 2 番目の制約式 (等式) に対する双対変数を $\lambda_i \in R$ とする。制約式の線形結合をとると、

$$
\sum_{v \in V} \sum_{p \in P^v} z_k \left(-y_p^k\right) + \sum_{i \in C} \left(\sum_{k \in K} \sum_{pinP^k} a_{ip}^k y_p^k \right) \lambda_i \geq \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \tag{10}
$$

$$
\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \left(-z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \right) y_p^k \geq \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \tag{11}
$$

ただし、$z_k \geq 0\ (k \in K), \lambda_i \in R\ (i \in C)$ である。このとき、$z_1, z_2, \ldots, z_{|K|}, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{|C|}$ を、

$$
c_p^k \geq -z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \tag{12}
$$

となるようにとると、問題 (9) の任意の実行可能解 y_k^p は、次の関係式を満たす

$$
c_p^k y_p^k \geq \left(-z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \right) y_p^k \tag{13}
$$

したがって、次の関係式も満たす

$$
\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} c_p^k y_p^k \geq \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \left(-z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \right) y_p^k \tag{14}
$$

さらに、次の関係式も満たす

$$
\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} c_p^k y_p^k \geq \sum_{k \in K} (-z_k) + \sum_{i \in C} \lambda_i \tag{15}
$$

(13) を書き換えると、

$$
\left(c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i + z_k \right) y_p^k \geq 0 \tag{16}
$$

となる。$y_k^p > 0$ となる運搬車 k の実行可能パス p については、

$$
c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i + z_k \geq 0
$$

がなりたつ、ということである。

(12) の条件の元で、(14) の右辺を最大化する問題

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k in K}(-z_k) + \sum_{i \in C}\lambda_i \\ \text{s.t.} & c_p^k \geq -z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \quad k \in K, p \in P^k \end{array} \tag{17}$$

が、問題 (9) の双対問題である。

問題 (9) において、実行可能解の集合 P_k を、その部分集合 $\hat{P}_k$ でおきかえた問題が限定主問題にあたる。限定主問題の双対問題は、

$$\begin{array}{ll} \max & \sum_{k in K}(-z_k) + \sum_{i \in C}\lambda_i \\ \text{s.t.} & c_p^k \geq -z_k + \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \quad k \in K, p \in \hat{P}^k \end{array} \tag{18}$$

となり、元の問題 (17) よりも制約式の数が少なく、目的関数は同じである。したがって、(17) の緩和問題になっている。

一般に、緩和問題の最適解が、元の問題の制約式を全て満たしていれば、元の問題の最適解になっている（「世界記録保持者は日本記録保持者の定理」)。17 の制約式を全て満たしているかどうかを調べるために、17 の制約式をつぎのように変形する

$$c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \geq -z_k \quad k \in K, p \in P^k.$$

これは、どのような $p \in P^k$ に対して計算した左辺の値も、$-z_k$ よりも小さくない、という関係式である。通常, P^k の要素数は非常に大きいので、全ての要素で上記の関係を確認するのではなく、P^k の要素の中で、$c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i$ を最も小さくするものだけについて確認する。

$$\begin{array}{ll} \min & c_p^k - \sum_{i \in C} a_{ip}^k \lambda_i \\ \text{subject to} & p \in P^k \end{array} \tag{19}$$

この最適値が, $-z_k$ よりも大きければ、(18) の最適解は、(17) の最適解になっていることがわかる。

4 Multi-commodity flow problem の場合

多品種フロー問題は、以下の線形計画問題として書ける。

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{a \in \delta^+(s_i)} x_a^i - \sum_{a \in \delta^-(s_i)} x_a^i\right) & \\ \text{s.t.} & \sum_{a \in \delta^+(v)} x_a^i - \sum_{a \in \delta^-(v)} x_a^i = 0 & \forall v \in V \setminus \{s_i, t_i\}\ i \in [k] \\ & \sum_{i=1}^{k} x_a^i \leq u_a & \forall a \in A \\ & x_a^i \geq 0\ \forall a \in A, i \in [k] & \end{array} \tag{20}$$

これは、edge formulation と呼ばれるものである。これ以外に、path formulation とよばれるものがある。P_{st} を、単純 (simple) な $(s-t)$ パスの集合とし、$P = P_{s1,t1} \cup \cdots \cup P_{s_k,t_k}$ と定義する。各パス $p \in P_{s_i,t_i}$ について、次の最適化問題を定義する

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{p \in P} f_p & \\ \text{s.t.} & \sum_{p \in P_a} f_p \leq u_a & \forall a \in A \\ & f_p \geq 0 & \forall p \in P \end{array} \tag{21}$$

$P' \subseteq P$ を、(21) の集合 P の部分集合とする。P' についての限定主問題を、次で定義する

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{p \in P'} f_p & \\ \text{s.t.} & \sum_{p \in P'_a} f_p \leq u_a & \forall a \in A \\ & f_p \geq 0 & \forall p \in P' \end{array} \tag{22}$$

(22) の実行可能解は、(21) の実行可能解になり、さらに、(22) の最適解は,(21) の最適値よりも大きくはならない。もし、(22) の最適解が (21) の最適解になっているか否かの判定のために、次の双対問題を定義する。

$$\begin{array}{lll} \min & \sum_{a \in A} u_a \mu_a & \\ \text{s.t.} & \sum_{a \in P} \mu_a \geq 1 & \forall p \in P' \\ & \mu_a \geq 0 & \forall a \in A \end{array} \tag{23}$$

(23) の最適解を μ とする。全ての $p \in P(P'$ ではない) で、制約式

$$\sum_{a \in P} \mu_a \geq 1$$

満たされていたとすると、このときの最適値は, (**??**) の最適値と一致する。この制約式を満たさないパス $p \in P$ があったとすると、このパスに対応する変数を (22) に追加する。

(22) から (23) を導出することは容易である。(22) の制約 $\sum_{p \in P'_a} f_p \leq u_a$ に対して、変数 $\mu_a \geq 0$ を定義する。この制約式の線形結合によって、次の式を得る

$$\sum_{a \in A} \sum_{p \in P'_a} \mu_a f_p \leq \sum_{a \in A} u_a \mu_a$$

ここで、μ_a を、

$$1 \leq \sum_{a \in P} \mu_a$$

となるようにとると、(22) の任意の実行可能解について

$$f_p \leq \sum_{a \in A} \mu_a f_a$$

が成り立つ。したがってまた、

$$\sum_{p \in P'} f_p \leq \sum_{p \in P'} \sum_{a \in A} \mu_a f_p \leq \sum_{a \in A} u_a \mu_a \tag{24}$$

も成り立つ. 制約

$$1 \leq \sum_{a \in P'} \mu_a$$

のもとで、(24) の最後の線形関数を最小化するのが双対問題であるから、(23) が得られる.